

# INTRODUCTION TO COMPRESSIVE SAMPLING

**Radek Hrbáček**

Bachelor Degree Programme (3), FEEC BUT

E-mail: xhrbac01@stud.feec.vutbr.cz

Supervised by: Pavel Rajmic

E-mail: rajmic@feec.vutbr.cz

**Abstract:** The Nyquist theorem is the main pillar of the traditional digital signal processing approach. It states that the sampling rate must be at least twice the maximum frequency present in the signal to guarantee perfect signal reconstruction from the sequence of its samples. In practice, we often compress the signal right after the sampling process to reduce the data size – so the irrelevant part of the information is immediately discarded. The novel compressive sampling approach is not limited to the frequency domain, it provides a new look on the signal by using an arbitrary basis. If we find a basis in which the signal is sparse, it is possible to take a small number of samples and reconstruct the signal successfully (i.e. further compression is not necessary).

**Keywords:** signal and image processing, Nyquist theorem, compressive sampling,  $l_1$ -optimization

## 1 ÚVOD

Až donedávna bylo v oblasti zpracování signálů považováno za samozřejmé, že je nutné signál vzorkovat s frekvencí nejméně dvakrát vyšší, než je nejvyšší frekvence v signálu obsažená. Toto pravidlo známe pod názvem Nyquistův teorém. Takto navzorkovaný signál ale klade vysoké nároky na kapacitu paměti a proto je často ihned komprimován za využití vlastností lidských smyslů (zraku a sluchu) a ze signálu je odstraněna část informace tak, abychom nepoznali rozdíl mezi komprimovaným a originálním signálem. Například u formátu JPEG se provádí nad částmi obrázku diskretní kosinová transformace (resp. vlnková u JPEG 2000) a získané koeficienty se kvantují nebo vůbec neuchovávají. Formát MP3 pak na základě psychoakustického modelu za využití principů časového a frekvenčního maskování odebírá informace, které člověk buď vůbec neslyší, nebo je nevnímá.

Tento model je sice funkční, ale plýtvá někdy poměrně drahými prostředky. Výrazně odlišný přístup je zvolen v případě *compressive sampling* (komprimující vzorkování). Princip spočívá v rozšíření pohledu na signál o další oblasti, neomezuje se tedy pouze na časovou a frekvenční oblast. Komprimace signálu je již integrována v samotném snímání, je snímáno pouze tolik informace, kolik je skutečně potřeba. Tím jsou ušetřeny prostředky při získávání signálu, ale na druhou stranu je potřeba využít sofistikovaných a časově náročných matematických metod k jeho rekonstrukci.

## 2 ZÁKLADNÍ POJMY

Před formálním popisem problému compressive sampling je nutné uvést některé základní pojmy. V této práci se omezíme na vektorové prostory konečné dimenze [4].

**Definice 1.**  $l_p$ -norma vektoru  $x \in \mathbb{C}^N$  je definována jako

$$\|x\|_p := \left( \sum_{i=0}^N |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty, \quad \|x\|_0 := |\{j : x_j \neq 0\}|. \quad (1)$$

O normu se ale jedná pouze v případě  $1 \leq p < \infty$ . Pro  $0 < p < 1$  neplatí trojúhelníková nerovnost, takže se jedná o *kvazinormu*,  $l_0$  navíc není pozitivně homogenní, tudíž se nejedná ani o kvazinormu. Pro zjednodušení se tato skutečnost běžně zanedbává a pro všechna  $0 \leq p < \infty$  se používá označení  $l_p$ -norma. Pro lepší představu o jednotlivých normách používáme zobrazení jednotkových koulí. Jednotková koule  $B_p^N$  v normě  $l_p$  je definována jako  $B_p^N := \{x \in \mathbb{C}^N, \|x\|_p \leq 1\}$ .

Klíčovým předpokladem v oblasti compressive sampling je tzv. *řídlost* vektoru. Z pozorování vyplývá, že mnohé reálné signály často mají řídkou reprezentaci v určité bázi (např. vlnkové transformace), což znamená, že se dají velmi dobře (s malou chybou) aproximovat bázovými vektory násobenými vektorem souřadnic, který má většinu prvků nulových [3]. Vektor  $x$  nazveme  $k$ -řídkým ( $k$ -sparse), pokud platí  $\|x\|_0 \leq k$ , tzn. počet jeho nenulových prvků je nejvýše  $k$ .

### 3 REKONSTRUKCE

Nyní je možné formálně popsat problém, kterým se budeme zabývat. Předpokládejme, že vektor  $x \in \mathbb{C}^N$  je  $k$ -řídký, vektor naměřených hodnot označme  $y \in \mathbb{C}^m$ . Matici  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  nazveme měřicí (*measurement matrix*). V následujícím textu se budeme zabývat optimalizační úlohou

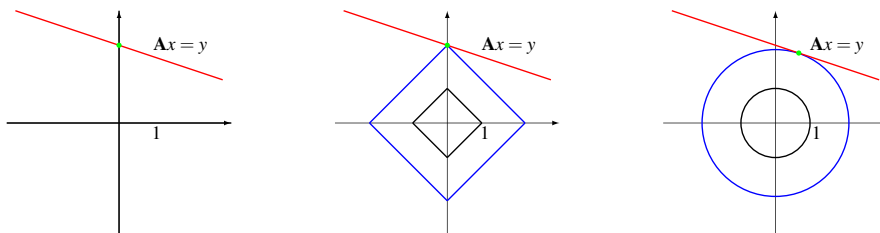
$$\min \|x\|_0 \quad \text{vzhledem k} \quad \mathbf{A}x = y \quad (\text{P1})$$

a také požadavky kladenými na  $\mathbf{A}$ , které zaručí možnost rekonstrukce  $x$  z  $y$ .

Slovně by se dala tato úloha popsat jako hledání nejřidšího řešení soustavy  $y = \mathbf{A}x$ . Násobení vektoru  $x \in \mathbb{C}^N$  maticí  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times N}$  představuje sejmnutí  $m$  „vzorků“ signálu  $x$ . Přitom nás zajímá případ  $m \ll N$ , kdy je signál silně podvzorkován. Soustava je nedourčená (obsahuje více neznámých než rovnic) a možných řešení je tedy nekonečně mnoho. Pokud ale víme, že vektor  $x$  je  $k$ -řídký, je možné za určitých podmínek rekonstrukci provést.

Vzhledem k vlastnostem  $l_0$ -normy je základní problém (P1) NP-těžký a tedy neřešitelný pro úlohy většího rozsahu. Lze ale ukázat, že pro vhodně zvolené měřicí matice  $\mathbf{A}$  se dá problém převést na

$$\min \|x\|_1 \quad \text{vzhledem k} \quad \mathbf{A}x = y \quad (\text{P2})$$



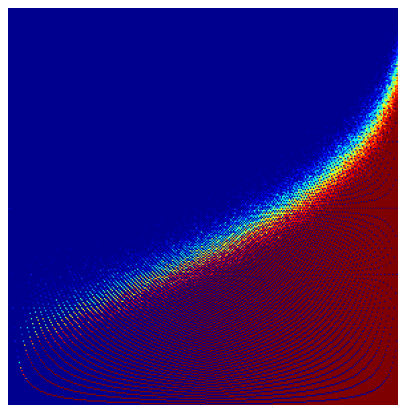
**Obrázek 1:** Nafukující se koule v normách  $l_0$ ,  $l_1$  a  $l_2$  a jejich dotyk s nadrovinou  $\mathbf{A}x = y$

Tato úloha je již konvexní a řešitelná řadou efektivních algoritmů, ekvivalentní úlohou je *lineární programování* [2]. Musíme ovšem zajistit, aby výsledek minimalizace podle úlohy (P2) byl shodný s výsledkem minimalizace podle úlohy (P1). Na obrázku 1 je znázorněna minimalizace ve třech normách (zleva  $l_0$ ,  $l_1$  a  $l_2$ ). Je na něm vidět, že výsledek  $l_0$ -minimalizace je stejně „řídký“ jako výsledek  $l_1$ -minimalizace, zatímco výsledek  $l_2$ -minimalizace již řídký není. Důvod je zřejmý – řídké řešení leží (v tomto případě dvourozměrného prostoru) na osách souřadného systému. Když si představíme  $l_1$ -kouli, jak se nafukuje, zřejmě se nejprve dotkne nadroviny  $\mathbf{A}x = y$  vrcholem (tedy v ose souřadného systému). Oproti tomu  $l_2$ -koule, která odpovídá řešení s minimální energií, se dotkne mimo osu a řešení pak není řídké.

Ale i v případě  $l_1$ -koule se může vyskytnout komplikace – pokud bude nadrovina  $\mathbf{Ax} = y$  rovnoběžná s hranou (resp. nadplochou)  $l_1$ -koule, potom bude možných řešení nekonečně mnoho a bude záležet na zvolené numerické metodě, ke kterému řešení se přikloní. Řešitelnost  $l_1$ -minimalizace tedy není v rozporu s vysokou náročností úlohy  $l_0$ -minimalizace. Shodnost výsledků je totiž zaručena jen pro omezenou podmnožinu matic  $\mathbf{A}$  a vektorů  $y$  [3].

O tom, zda bude řešení úlohy (P2) shodné s (P1), rozhodují kromě řídkosti snímaného vektoru  $x$  především vlastnosti rekonstrukční matice  $\mathbf{A}$ . Ty lze vyšetřovat několika vlastnostmi – *Null Space Property*, *Restricted Isometry Property*, *Spark* a také *vzájemnou koherencí* [3]. V principu je nutné konstruovat měřicí matici  $\mathbf{A}$  tak, aby se svými vlastnostmi co nejvíce blížila ortonormální bázi. Protože se ale jedná o obecný systém  $N$  generátorů  $m$ -rozměrného prostoru, nemohou být všechny sloupce lineárně nezávislé. Lze ale ukázat [3], že stačí, aby každá podmatice složená z nejvýše  $k$  sloupců byla dobře podmíněná.

V současné době jsou známy pouze stochastické matice splňující tato kritéria. Úspěšně lze využít matice s *Gaussovým* nebo *Bernoulliho* rozložením. Dá se navíc ukázat [3], že rekonstrukční vlastnosti matic s tímto rozložením jsou invariantní vůči unitární transformaci ( $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ ). Rekonstrukční úloha pak bude podobná:  $\min \|z\|_1$  vzhledem k  $\mathbf{AU}z = y$ , potom  $x = \mathbf{U}z$ .



**Obrázek 2:** Výsledek simulace – relativní četnost úspěšné rekonstrukce v závislosti na míře podvzorkování ( $x: m/N$ ) a řídkosti signálu ( $y: k/m$ ); červená  $\approx 100\%$

## 4 ZÁVĚR

Teorie compressive sampling byla ověřena v prostředí MATLAB, kde byla simulována tzv. *one pixel camera* (kamera složená z jediného snímacího bodu a pole mikrozrcátek, které odrážejí světlo buď do snímače nebo mimo něj [1]). Rekonstrukce byla provedena převedením  $l_1$ -minimalizace na úlohu lineárního programování. Měřicí matice byla generována s Bernoulliho rozložením. Z grafu na obrázku 2 je patrné, že pro úspěšnou rekonstrukci podvzorkovaného signálu je nutné, aby byl dostatečně řídký. Rekonstrukce je také do jisté míry odolná vůči šumu, signál tedy nemusí být řídký ve striktním smyslu, jak bylo definováno výše, může obsahovat malé hodnoty ve všech prvcích.

Přesto, že je compressive sampling novinka v oblasti zpracování signálů, ve světě se jím již seriózně zabývá velké množství vědeckých týmů. Začínají se objevovat i praktické aplikace, mezi nimi např. rekonstrukce obrazu z nukleární magnetické rezonance (NMR) (nižší počet měření zrychluje proceduru a tím se snižují nároky kladené na pacienta), *inpainting* (obnova poškozených snímků), levnější kamery pracující v neviditelné oblasti spektra a další. Jiná je situace v České republice – tato práce je teprve jedna z prvních.

## REFERENCE

- [1] BARANIUK, R.G. Compressive Sensing. *IEEE Signal Processing Magazine* 2007, 24, s. 118-120,124
- [2] CANDÈS, E.J., TAO, T. Decoding by Linear Programming. *IEEE Trans. Inf. Th.* 2005, 51, 12, s. 4203-4215
- [3] FORNASIER, M; RAUHUT, H. *Handbook of Mathematical Methods in Imaging*, kapitola Compressive Sensing. Springer, 2011, ISBN 978-0-387-92920-0.
- [4] ŠPIŘÍK, J.; RAJMÍČ, P.; VESELÝ, V. Reprezentace signálů: od bází k framům. *Elektrorevue - Internetový časopis* (<http://www.elektrorevue.cz>), roč. 2010, č. 111, s. 1-10. ISSN: 1213- 1539.