ADVANCED ELLIPTIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS SOLUTION

Václav Valenta
Master Degree Programme (2), FIT VUT
E-mail: xvalen09@stud.fit.vutbr.cz

Supervised by: Jiří Kunovský
E-mail: kunovsky@fit.vutbr.cz

ABSTRACT

Elliptic partial differential equations play an important role in advanced simulation systems that often transfer these equations to a large set (typically thousands) of ordinary differential equations. Real time applications require very fast and precise methods for correct work. These qualities provide Modern Taylor Series Method.

1 ÚVOD

V moderním světě hrají simulace stále důležitější úlohu. Simulovat můžeme provoz na světly řízené křižovatce, elektrické obvody, ale i děje v reaktoru jaderných elektráren. Simulace s sebou přináší především možnosti experimentování s modelem.

Hlavní výhodou simulace je, že nemusíme mít k dispozici simulovaný objekt. Můžeme např. simulovat elektrický obvod, připojovat postupně napětí na jednotlivé vývody a zjišťovat, jestli někde nedochází k napěťovému průrazu apod.

2 ROZBOR

Tento článek se zaměřuje na spojité systémy, které jsou popsány soustavou parciálních diferenciálních rovnic. Obecně lze zapsat parciální diferenciální rovnici druhého stupně v třírozměrném prostoru jako

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+D\frac{\partial z}{\partial x}+E\frac{\partial z}{\partial y}+Fz+G=0 \tag{1}$$

Kde A, B, C, D, E, F a G jsou funkce proměnných x a y. Aby tato rovnice měla jednoznačné řešení, je nutné uvést počáteční nebo okrajové podmínky. Počáteční podmínky stanovují funkci, popř. její derivaci v počátečním časovém okamžiku v oblasti, ve které je daná rovnice řešena. V reálných simulacích jde např. o rychlost, kterou se hmotný bod pohybuje na počátku simulace. Okrajové podmínky definují hodnotu funkce nebo její derivace v určitých bodech, např. při řešení vlnové rovnice se stanoví množina bodů, ve kterých je amplituda vlnění nulová.

Řešením parciální diferenciální rovnice je obecně n-rozměrná funkce závisející na počátečních podmínkách a vyhovující okrajovým podmínkám.

2.1 ELIPTICKÉ PARCIÁLNÍ ROVNICE

Z rovnice (1) je možné vytvořit matici Q takovou, že

$$Q = \begin{pmatrix} A(x,y) & B(x,y) \\ B(x,y) & C(x,y) \end{pmatrix} \tag{2}$$

V případě, že determinant δ matice Q je větší než nula, jedná se o eliptickou parciální diferenciální rovnici.

3 NUMERICKÉ ŘEŠENÍ PARCIÁLNÍCH ROVNIC

Mezi standardní a používané metody řešení parciálních diferenciálních rovnic patří metoda konečných prvků, metoda přímek, metoda konečných diferencí a mnoho dalších. Více informací možno nalézt v literatuře [2].

Numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic obecně představuje aproximaci řešení v daných uzlových bodech. Většina dnes používaných simulátorů rozdělí prostor, ve kterém rovnici řeší, mřížkou, čímž vznikne soustava uzlových bodů.

Metoda konečných diferencí řešenou rovnici trasnformuje na soustavu algebraických rovnic (SLAR). SLAR můžeme řešit např. Gauss-Seidelovou metodou nebo je možné soustavu převést na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic a řešit tuto soustavu metodami Runge-Kutta, Adams-Bashforth nebo metodou Taylorovy řady.

4 LAPLACEOVA ROVNICE

Na závěr uvedu řešení dvourozměrné Laplaceovy rovnice. Touto rovnicí je možné vypočítat velikost napětí na dvourozměrné destičce. Platí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \wedge \quad u(x,0) = 0,\ u(x,1) = \sin \pi x,\ u(0,y) = u(1,y) = 0 \tag{3}$$

Pro potřeby metody Taylorovy řady je nutné přidat ještě další rozměr – čas a řešit přechodný děj. Navrhovaná úprava je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{4}$$

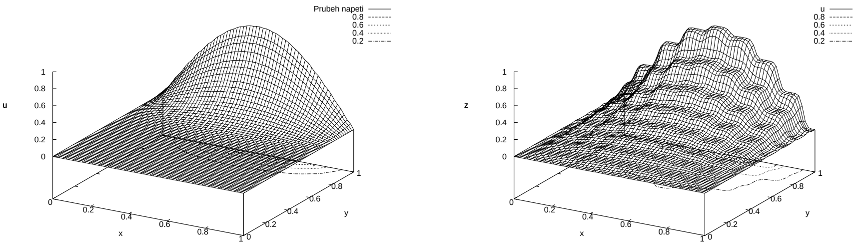
Pozn. pro ustálený stav platí $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, takže se nalezne hledané řešení. Rovnici řešíme tak, že nahradíme derivace podle prostorových proměnných diferencemi.

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} \sim \frac{u(x+\Delta x, y) - 2u(x,y) + u(x-\Delta x, y)}{\Delta x^2} \tag{5}$$

Stejným způsobem vyjádříme i derivaci podle y. Když dosadíme tyto diference do mřížky, na které se parciální diferenciální rovnice řeší, tak s výjimkou okrajových uzlů můžeme obecně vyjádřit rovnice jako

$$u'_{i,j} = \frac{1}{h^2}\left(u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}\right) \quad \wedge u_{i,j}(0) = 0 \tag{6}$$

Kde $\Delta x = \Delta y = h$. Vidíme, že můžeme vytvořit libovolně velkou soustavu diferenciálních rovnic. V této soustavě diferenciálních rovnic se vyskytuje pouze derivace podle časové proměnné. Řešení této rovnice bylo získáno v simulačním nástroji TKSLC vyřešením soustavy 10 000 a 64 obyčejných diferenciálních rovnic.



Obrázek 1: Řešení rovnice (4)

5 ZÁVĚR

Analytické řešení parciálních diferenciálních rovnic je velmi obtížné, proto se používá řešení numerické, které často transformuje soustavu parciálních rovnic na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic. Tyto soustavy diferenciálních rovnic se řeší např. metodou Taylorovy řady, která s sebou přináší výhody stabilního, přesného a velmi rychlého řešení. Metodu Taylorovy řady je možné velmi dobře paralelizovat, což je v dnešní době velmi důležitá vlastnost.

REFERENCE

[1] Bartsch, H. J.: Matematické vzorce, ISBN 80-204-0607-7

[2] Peringer, P.: Skripta předmětu SNT

[3] Škrášek, J.: Základy aplikované matematiky II