PRINCIPLE OF ARGUMENT INCREMENT FOR SEARCHING POLYNOMAL ROOTS

Pavel Tošer
Bachelor Degree Programme (1), FEEC BUT
E-mail: xtoser00@stud.feec.vutbr.cz

Supervised by: Petr Sadovský
E-mail: petrsad@feec.vutbr.cz

ABSTRACT

Several methods exist for searching multinominal roots. A new undocumented method is a principle of an argument increment. This method removes shortcomings already existing methods and she could also complement them with a new knowledge. The functions which are used in programming environment MATLAB provide incorrect results, therefore new function programmed.The process is based on the Newton method of tangents in combination with the principle of an argument increment. The function makes it possible to search out all roots of multinominals and also to determine the multiplicity of the roots.

1. ÚVOD

Jedním ze základních problémů při semisymbolické analýze obvodů je rychlá a přesná lokalizace kořenů polynomu. Existuje sice mnoho metod, které tento problém řeší, ale všechny tyto metody selhávají pokud se jedná o lokalizaci násobných kořenů. Tento článek se zabývá možností využití metody přírůstku argumentu pro hledání násobných kořenů polynomu.

2. POUŽITÉ METODY

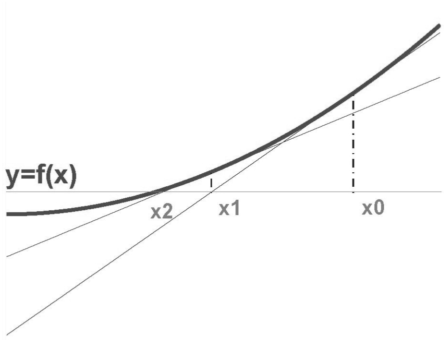
Úlohu nalezení kořenů polynomu lze rozdělit do dvou částí. V první části se řeší lokalizace jednotlivých kořenů, druhá část zjišťuje jejich násobnost. Pro lokalizaci kořenů byla zvolena Newtonova metoda tečen pro její rychlou konvergenci. Násobnost kořenů pak byla ověřována metodou přírůstku argumentu (MPA).

2.1. NEWTONOVA METODA TEČEN

Newtonova metoda tečen je určena k rychlému nalezení kořene. Vyžaduje dva vstupní parametry. Prvním parametrem je počáteční bod aproximace. Druhým parametrem je přesnost ε s jakou mají být kořeny nalezeny. Jednotlivé iterace Newtonovy metody tečen jsou dány vztahem (1).

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f^{l}(x_k)} \tag{1}$$

Algoritmus provádí nové a nové iterace, dokud není splněna podmínka $|x_k - x_{k-1}| \langle \varepsilon$. S rostoucím počtem iterací roste i přesnost nalezení polohy kořene [4].



Obrázek 1: Newtonova metoda tečen

2.2. PRINCIP PŘÍRUSTKU ARGUMENTU

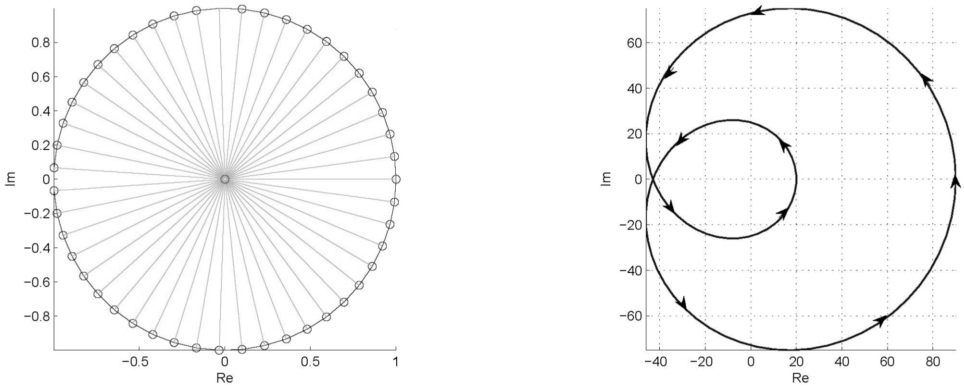
Princip přírůstku argumentu je známý z teorie funkcí komplexní proměnné [1]. Předpokládejme, že komplexní funkce $\omega = F(z)$ je analytická v jednoduše souvislé oblasti *D* včetně její hranice *C* a že nemá žádné nulové body ležící na této hranici. Potom je počet kořenů *N* rovnice $F(z) = 0$, ležících uvnitř oblasti *D* roven absolutní hodnotě přírůstku argumentu na křivce vytvořené pomocí funkce $\omega = F(z)$ dělenému veličinou 2π, když proměnná *z* ve své rovině oběhne hranici *C*. Platí tedy

$$N = \frac{1}{2\pi} \left| \Delta_C Arg f(z) \right|. \tag{2}$$

Slovní vyjádření předchozího vztahu je následující: počet kořenů rovnice ležících uvnitř křivky *C* je roven počtu otáček kolem počátku soustavy souřadnic vektoru $\omega = F(z)$ v komplexní rovině ω, když proměnná *z* jednou oběhne hranici *C*, tyto definice jsou uvedeny [1][2].

3. LOKALIZACE KOŘENŮ POLYNOMU

- Nejprve se vytvoří kružnice, která ohraničuje oblast v níž se nacházejí všechny kořeny polynomu [1]. Tato kružnice je rozdělena na *n* ekvidistantně vzdálených bodů. Každý tento bod je počátkem pro Newtonovu metodu tečen. Výsledem jednotlivých iterací jsou tedy nalezené kořeny s přesností *ε*.
- Vzhledem k tomu, že algoritmus Newtonovy metody tečen neposkytuje informaci o násobnosti nalezeného kořene, je k tomuto účelu využita metoda přírůstku argumentu. Kolem kořene je zkonstruována kružnice a je určena násobnost kořene, který se nachází uvnitř této kružnice pomocí metody přírustku argumentu. Poloměr kružnice, která má být sestrojena kolem kořene vzrůstá s rostoucí násobností kořene.



Obrázek 2: Lokalizace kořenů a následné ověření násobnosti

4. VÝSLEDKY

Algoritmus pro hledání násobných kořenů založený na výše popsaných metodách byl naprogramován a testován v prostředí Matlab. Například pro polynom pátého řádu

$p(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$ byl za pomocí MPA nalezen pětinásobný kořen $x_{1,2,3,4,5} = 1$. Standardní funkce prostředí Matlab najde tento kořen jako shluk pěti kořenů: $x_1 = 1{,}001 + 0{,}0007i$, $x_2 = 1{,}001 - 0{,}0007i$, $x_3 = 0{,}9986 + 0{,}0012i$, $x_4 = 0{,}9986 - 0{,}0012i$, $x_5 = 0{,}9988$.

5. ZÁVĚR

V prostředí Matlab byla naprogramována funkce, která umožňuje lokalizaci kořenů polynomu. Jak bylo zjištěno na reálných polynomech, pokud má polynom nenásobné kořeny, jsou výsledky srovnatelné s výsledky běžně používaných metod. Pokud má však polynom násobné kořeny algoritmus využívající MPA umožňuje mnohem přesnější lokalizaci těchto kořenů. Za problémové lze označit polynomy s vícenásobnými kořeny, u nichž v oblasti násobnosti kořene větší než přibližně 30 nejsou výsledky tolik přesné. Dalo by se říci, že s rostoucí násobností se vliv nepřesností zvětšuje do násobnosti 30 exponenciálně a od této hodnoty je průběh lineární. Problémem může být také vyhledávání velmi blízkých kořenů, blížících se k zadané přesnosti výpočtu. Výsledky naprogramovaných funkcí byli ověřeny na reálných polynomech.

LITERATURA

[1] I.G.Aramanovic, G.L.Lunc, L.E.Elsgolc: Funkcie komplexnej premenej, operátorový počet, teoria stability. Alfa, SNTL, 1973.

[2] J. Diblík, P.Sadovský: Principle of argument for searching polynomial roots, Radioelektronika 2003, BUT,2003.

[3] S.Míka: Numerické metody algebry. SNTL, 1985.

[4] B. Fajmon, I. Růžičková: Matematika 3, VUTIUM, 2003.